Лекция 11
О ПОЛНОТЕ НЕКОТОРЫХ СИСТЕМ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Пусть D — односвязная область, система функций $\{f_k(z)\}$, $f_k(z) \in A(D)$, $\forall k \in \mathbb{N}$. Скажем, что система $\{f_k(z)\}$ *полна в области* D, если линейная оболочка этой системы совпадает с классом всех аналитических функций в области D. Справедлив следующий критерий полноты.

Теорема 11.1 (критерий Маркушевича). Система $\{f_k(z)\}$ полна в области D тогда и только тогда, когда из равенства

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_C \gamma(t) f_k(t)dt = 0, \quad k \in \mathbb{N},$$

где C — контур, $C \subset D$, функция $\gamma(t)$ аналитична на C и вне C, $\gamma(\infty) = 0$, следует, что

$$\gamma(t) \equiv 0.$$

Доказательство. Предположим, что для любого непрерывного функционала $\frac{1}{2\pi i}\oint_C \gamma(t) f(t)dt$, $C \subset D$, $\gamma(t)$ аналитична на C и вне C, $\gamma(\infty) = 0$ из условия

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_C \gamma(t) f_k(t)dt = 0, \quad k \in \mathbb{N}$$

следует, что $\gamma(t) \equiv 0$.

Докажем, что система $\{f_k(z)\}$ полна в классе $A(D)$. Если бы эта система $\{f_k(z)\}$ была бы не полной в классе $A(D)$, то по теореме 10.1 существовала бы аналитическая функция $A(z)$ такая, что $A(z)$ не принадлежит линейной оболочке системы $\{f_k(z)\}$, при этом существует линейный непрерывный функционал $\frac{1}{2\pi i}\oint_C \gamma(t) f(t)dt$ такой, что $\frac{1}{2\pi i}\oint_C \gamma(t) A(t)dt \neq 0$, но $\frac{1}{2\pi i}\oint_C \gamma(t) f_k(t)dt = 0$, $\forall k \in \mathbb{N}$, т.е. $\gamma(t) \not\equiv 0$. Приходим к противоречию, тем самым система $\{f_k(z)\}$ полна в $A(D)$.

Пусть система $\{f_k(z)\}$ полна в классе $A(D)$. Покажем, что

$$\text{если } \frac{1}{2\pi i}\oint_C \gamma(t) f_k(t)dt = 0, \ \ \forall k \in \mathbb{N}, \quad \text{то } \gamma(t) \equiv 0.$$

Из полноты системы $\{f_k(z)\}$ следует, что $\forall m \in \mathbb{N}$ справедливо

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_C \gamma(t)t^m dt = 0, \quad m \geq 0.$$

Так как $\gamma(t)$ аналитична на контуре C и вне C, $\gamma(\infty) = 0$, то при достаточно большом R имеем

$$\gamma(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{t^{k+1}}, \quad |t| \geq R.$$

Тем самым

$$0 = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \gamma(t)t^m dt = \frac{1}{2\pi i}\oint_{|t|=r>R} \gamma(t)t^m dt = a_m, \ \text{ или } \ \gamma(t) \equiv 0.$$

Теорема доказана. ■

Применим критерий полноты к некоторым системам аналитических функций.

Теорема Гельфонда. Пусть $f(z)$ — целая функция порядка ρ, $0 < \rho < +\infty$, $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, $a_n \neq 0$, $n \geq 0$. Последовательность $\{\lambda_n\}$ — последовательность комплексных чисел с показателем сходимости τ. Если $\tau > \rho$, то система $\{f(\lambda_k z)\}$ полна во всей плоскости.

Доказательство. Рассмотрим функционал $\frac{1}{2\pi i}\oint_C \gamma(t) f(t)dt$, при этом

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_C \gamma(t) f(\lambda_k t)dt = 0, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Так как при большом R

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_C \gamma(t) f(\lambda_k t)dt = \frac{1}{2\pi i}\oint_{|t|=R} \gamma(t) f(\lambda_k t)dt, \quad k \in \mathbb{N},$$

то положим

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{|t|=R} \gamma(t) f(zt)dt.$$

Функция $F(z)$ — целая и $F(\lambda_k) = 0$, $k \in \mathbb{N}$. Оценим $F(z)$:

$$|F(z)| \leq M \cdot R \cdot e^{(R|z|)^{\rho+\varepsilon}} < e^{|z|^{\rho+2\varepsilon}}, \quad |z| > r_0(\varepsilon), \ \ M - \text{const},$$

поэтому функция имеет порядок $\rho_F \le \rho$. Из теоремы единственности II (см. с. 16) следует, что $F(z) \equiv 0$.

С другой стороны, $F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \left(\frac{1}{2\pi i} \oint_{|t|=R} \gamma(t) t^k dt \right) z^k$, тем самым

$$\forall k \ge 0 \quad \frac{1}{2\pi i} \oint_{|t|=R} \gamma(t) t^k dt = 0.$$

Если $\gamma(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{b_k}{t^{k+1}}$, то $b_k = 0 \quad \forall k \ge 0$. Итак, функция $\gamma(t) \equiv 0$, по критерию полноты следует, что система $\{f(\lambda_k z)\}$ полна во всей плоскости. ■

Теорема Маркушевича. Пусть $f(z)$ — целая функция порядка ρ, $0 < \rho < \infty$ и типа σ, $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, причем все коэффициенты $a_k \ne 0$, $k \ge 0$. Последовательность комплексных чисел $\{\lambda_k\}$ такова, что $\overline{\lim_{k\to\infty}} \frac{k}{|\lambda_k|^\rho} = \tau$. Отсюда следует, что система $\{f(\lambda_k z)\}$ полна по меньшей мере в круге $|z| < R_0 = \left(\frac{\tau}{\sigma e \rho}\right)^{\frac{1}{\rho}}$.

Доказательство. Рассмотрим функцию

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|t|=R} \gamma(t) f(zt) dt, \quad 0 < R < R_0.$$

Функция $F(z)$ — целая и $F(\lambda_k) = 0$, $k \ge 0$. Оценим $F(z)$:

$$|F(z)| \le M \cdot R \cdot e^{(\sigma+\varepsilon)(R|z|)^\rho} < e^{(\sigma+2\varepsilon)R^\rho |z|^\rho}, \quad |z| > r_0(\varepsilon).$$

Тем самым функция $F(z)$ имеет порядок не выше ρ или при порядке ρ тип $\sigma_F \le \sigma R^\rho$.

По условию

$$\overline{\lim_{k\to\infty}} \frac{k}{|\lambda_k|^\rho} = \tau = \sigma e \rho (R_0)^\rho > \sigma e \rho (R)^\rho \ge e \rho \sigma_F.$$

По теореме единственности III (см. с. 16) из этого неравенства следует, что $F(z) \equiv 0$, поэтому $\gamma(t) \equiv 0$. По критерию полноты система $\{f(\lambda_k z)\}$ полна. ■

Следствие. Если в условиях теоремы $\overline{\lim\limits_{k\to\infty}}\dfrac{k}{|\lambda_k|^{\rho}}=\infty$, то система $\{f(\lambda_k z)\}$ полна во всей плоскости.

Пусть класс $C[0,1]$ — класс непрерывных функций на отрезке $[0,1]$ с нормой $\|f\|=\max\limits_{[0,1]}|f(z)|$, которая соответствует равномерной сходимости в этом классе. Известно (**теорема Рисса**), что любой непрерывный функционал $l(f)$ в $C[0,1]$ имеет вид

$$l(f)=\int\limits_0^1 f(t)d\sigma(t),$$

где $\sigma(t)$ — функция ограниченной вариации на отрезке $[0,1]$. Известно также, что в этом нормированном пространстве $C[0,1]$ для полноты системы функций $\{f_k(t)\}$ на $[0,1]$ необходимо и достаточно, чтобы из равенства $l(f_k)=0$, $k\geq 0$ вытекало, что $l(f)\equiv 0$.

Рассмотрим вопрос о полноте системы $\{x^{\lambda_k}\}$ на отрезке $[0,1]$.

Теорема Мюнтца. Пусть последовательность действительных чисел $\{\lambda_k\}$ такова, что $0<\lambda_k\uparrow\infty$, ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{1}{\lambda_k}$ расходится. Тогда система $\{x^{\lambda_k}\}\cup\{1\}$, $k\geq 1$, полна на отрезке $[0,1]$ в классе $C[0,1]$, $\{1\}$ — функция, равная единице.

Доказательство. Пусть линейный непрерывный функционал $l(f)=\int\limits_0^1 f(t)d\sigma(t)$ таков, что $l(1)=0$, $l(x^{\lambda_k})=0$, $k\geq 1$.

Рассмотрим функцию $F(z)=\int\limits_0^1 t^z d\sigma(t)$. Имеем $F(0)=0$, $F(\lambda_k)=0$, $k\geq 1$,

$$|t^z|=|e^{z\ln t}|=e^{x\ln t}\leq 1,\qquad \text{если } x>0,\ t\in[0,1].$$

Поэтому функция $F(z)$ ограничена в правой полуплоскости $\mathrm{Re}\,z=x>0$ и аналитична. Функция $\omega(z)=\dfrac{1-z}{1+z}$ конформно отображает полуплоскость $\mathrm{Re}\,z>0$ в единичный круг $|\omega|<1$. Функция $f(z(\omega))=\varphi(\omega)$ — аналитична и ограничена в единичном круге $|\omega|<1$ и $\varphi(p_k)=0$, $k\geq 1$, где

$$p_k=\frac{1-\lambda_k}{1+\lambda_k},\quad 1-|p_k|=\frac{2}{1+\lambda_k}.$$

Ряд $\sum_{k=1}^{\infty}(1-|p_k|)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2}{1+\lambda_k}$ расходится, тем самым в силу теоремы единственности I (см. с. 16) функция $\varphi(\omega)\equiv 0$, отсюда функция $f(z)\equiv 0$. В частности, $f(k)=0$, $k\geq 1$. Но

$$f(k)=\int_0^1 t^k d\sigma(t)=0, \quad k\geq 1.$$

Система $\{t^k\}\cup\{1\}$ полна в классе $C[0,1]$ (теорема Вейерштрасса), поэтому функционал $l(f)=0$. Итак, система $\{x^{\lambda_k}\}\cup\{1\}$ полна. ■